Máquina de Turing e o Problema da Parada

#10

O Problema da Parada

Teorema 1: Existe um conjunto $K \subseteq \mathbb{N}$ que é recursivamente enumerável mas que não é recursivo.

Demonstração:
Como vimos no vídeo 8, podemos associar um número único a toda MT (que é o seu nº de Gödel).
Dessa maneira, podemos listar as MT's através dos seus números de Gödel em ordem crescente. A critério de simplificação:

$$P_1, P_2, P_3, \dots$$

Chamemos o número $i \in \mathbb{N}$ de índice da MT P_i.

Considere agora o conjunto $K \subseteq \mathbb{N}$ definido assim:

$$K = \{i: P_i(i) \downarrow\}.$$

Ou seja, K é o conjunto daquelas MT que, recebendo seu próprio código como entrada na fita, encerram a sua execução (não entram em loop) e escrevem alguma cadeia de símbolos ‘1’ na fita.

Lema 1: K é recursivamente enumerável.

Vamos utilizar a proposição 1 do vídeo passado:

Um conjunto $D \subseteq \mathbb{N}$ é recursivamente enumerável sse existe um predicado $M(x, y)$ decidível tal que $x \in D \leftrightarrow (\exists y) M(x, y)$, em que $y \in \mathbb{N}$.

A sentença $x \in K$ pode ser expressa como $(\exists y) M(x, y)$, em que $M(x, y) =$ "a MT de índice x para com entrada x em até y passos".

O predicado $M(x, y)$ é decidível, basta executarmos a MT P_x e checarmos se ela para, de fato, em até y passos.

Lema 2: K não é recursivo.

Por absurdo, vamos supor que K é recursivo. Assim, sua função característica f_K

$$f_K(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

é computável (o que significa dizer, então, que existe uma MT, digamos, G, que calcula essa função).

Lema 2: K não é recursivo.

Definimos agora um procedimento H que, alimentado com uma entrada $i \in \mathbb{N}$, faz o seguinte:

1. Calcula $f_K(i)$ (pode usar G para isso);
2. Se $f_K(i) = 0$, H escreve '1' na fita e para;
3. Se $f_K(i) = 1$, H escreve '1' indefinidamente na fita.

Observe que H é uma MT que pode parar ou entrar em loop infinito.

Suponha que H é a MT de índice m, isto é, $H = P_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$.
Vamos calcular $H(m) = P_m(m)$:

1. Calculamos $f_K(m)$ (usando G);
2. Se $f_K(m) = 0$, H escreve '1' na fita e para;
3. Se $f_K(m) = 1$, H escreve '1' indefinidamente na fita.

Mas

- $f_K(m) = 0$ significa que $m \notin K$, ou seja, a máquina de índice m (que é H) não para a sua execução;
- $f_K(m) = 1$ significa que $m \in K$, ou seja, a máquina de índice m (que é H) para.

Lema 2: K não é recursivo.

Logo,

- Se $f_K(m) = 0$, H escreve '1' na fita e para;
- Se $f_K(m) = 1$, H escreve '1' indefinidamente na fita.

É o mesmo que dizer

- Se H não para, então H para;
- Se H para, então H não para.

Logo, H para se e somente se não para!!!

Lema 2: K não é recursivo.

Conclusão: a MT G, que calcula a função característica do conjunto K, não pode existir.
Portanto, K não é recursivo. ■

Esse resultado é conhecido como a *indecidibilidade do problema da parada.*
Observe $K = \{i : P_i(i) \downarrow\}$.
Como K é r.e. mas não é recursivo, então não podemos sempre decidir mecanicamente se uma dada MT entra em loop infinito (não existe um "detector universal de loops infinitos").

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br